МАТЕМАТИКА

Часть 1

Учебное пособие

Математика

Часть 1

*студента(ки)*_______*курса*_____________________________*факультета*

____

____

*группы №*______

*направления*____

____

Ставрополь
2020

УДК 51(076)
ББК 22.1я73
М 34

Авторский коллектив:
Татьяна Александровна Гулай
Анна Федоровна Долгополова
Виктория Артемовна Жукова
Светлана Васильевна Мелешко
Ирина Алексеевна Невидомская

Математика: учебное пособие / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, В.А. Жукова, С.В. Мелешко, И.А. Невидомская. – Ставрополь: 2020. – 145 с.

Учебное пособие входит в серию методических разработок, призванных способствовать овладению студентами теоретическими основами материала и появлению у них навыков решения задач по основным разделам курса математики.

УДК 51(076)
ББК 22.1я73
М 34

Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 Матрицы. Основные понятия и определения

Определение 1. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C, …, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i - номер строки, j - номер столбца.

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной записи,

$$A = (a_{ij}); \quad i = 1,2,\dots,m; \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Например, $\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$. Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы: $[\ ]$, $\|\ \|$.

Две матрицы A и B одного размера называются **равными,** если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1,2,\dots m;\quad j = 1,2,\dots,n.$

Виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой (вектором-строкой),** а из одного столбца – **матрицей–столбцом (вектором-столбцом):**

$$A = (a_{11}\, a_{12}, \dots, a_{1n}) \text{ – матрица-строка; } B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \text{ – матрица-столбец.}$$

Матрица называется **квадратной** n-го порядка, если число её строк равно числу столбцов и равно n.

Например, $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки $(i=j)$, называются **диагональными** и образуют **главную диагональ** матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется **диагональной.**

Например, $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется **единичной** матрицей n-го порядка, она обозначается буквой E.

Например, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется **нулевой**, если все её элементы равны нулю:

$$\underset{m\times n}{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Операции над матрицами. Умножение матрицы на число

Определение 1. Произведением матрицы A на число α называется матрица $B=\alpha A$, элементы которой $b_{ij}=\alpha a_{ij}$ при $i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,n$.

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0\cdot A=O$.

Определение 2. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m\times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ при $i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно). В частном случае $A+O=A$.

Определение 3. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A-B=A+(-1)\cdot B$.

Определение 4. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда произведением матриц $\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}, \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Определение 5. Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е.:
$A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A.$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0 = E, \quad A^1 = A.$ Нетрудно показать, что $A^m \cdot A^k = A^{m+k}, \quad (A^m)^k = A^{mk}.$

Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' называется **транспонированной** относительно матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица A' имеет размер $n \times m$.

Например, $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad A'_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$

В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например $A^{т}$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Умножить матрицу на число 5, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

$$5A = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ 15 & 40 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Вынести общий множитель за знак матрицы:

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти матрицу C=A+B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$, где $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 5 & 4 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times3}{B}=\underset{2\times3}{C}$. Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

$$\tilde{N}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot3+0\cdot5+2\cdot(-2) & (-1)\cdot0+0\cdot4+2\cdot0 & (-1)\cdot1+0\cdot4+2\cdot1\\ 3\cdot3+4\cdot5+0\cdot(-2) & 3\cdot0+4\cdot4+0\cdot0 & 3\cdot1+4\cdot4+0\cdot1\end{pmatrix}.$$

Получаем $C=\begin{pmatrix}-7 & 0 & 1\\ 29 & 16 & 19\end{pmatrix}$.

Пример 5. Найти A^2, где $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 6\\ 24 & 32\end{pmatrix}$.

Задания для решения в аудитории

1. Найти матрицу C=A+B, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -5 & 6 & 7\\ 2 & -3 & -4\end{pmatrix}$

2. Найти матрицу D=C - F, если $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ 5 & 6 & -7\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$

3. Найти матрицу E=4S+2G, если $S=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 0 & 5 & 6\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}4 & 6 & -1\\ 0 & -5 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$

4. Найти матрицу X=A·B, если $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & -7\\ -1 & 6 & -3\\ 2 & -4 & 1\end{pmatrix}$

1.3 Определители квадратных матриц

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$, или **определителем первого порядка**, называется элемент a_{11}: $\Delta_1=|A|=a_{11}$. **Например**, пусть $A=(8)$, тогда $\Delta_1=|A|=8$.

Определитель матрицы A обозначается $|A|$, Δ или det A.

Определителем матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$, или **определителем второго порядка**, называется число, которое находится по формуле $\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$.

Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$, или **определителем третьего порядка,** называется число, которое находится по формуле $\Delta_3 = |A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарриуса). Покажем это на схеме:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 5 + 2\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 4\cdot 3 - 2\cdot 0\cdot 3 - (-1)\cdot 2\cdot 5 - 4\cdot 1\cdot 1 =$

$$= 0 + 4 - 12 - 0 + 10 - 4 = -2.$$

Для того, чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потребуются некоторые дополнительные понятия.

Минором M_{ij} **элемента** a_{ij} матрицы А n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из матрицы А вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы А третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров (n-1)-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, если $(i + j)$ - нечетное число.

Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

Определителем квадратной матрицы А n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов 1-й строки на их алгебраические дополнения: $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{s=1}^{n} a_{1S}A_{1S}$ (разложение по элементам 1-й строки).

Например, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить определитель второго порядка, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

Решение. $\Delta=|A|=\begin{vmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot 5-8\cdot 1=-18.$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка $|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}.$

Решение. $\Delta=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 0+1\cdot 3+3\cdot 6=21.$

Пример 3. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\mathrm{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0;\qquad \mathrm{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3;\qquad \mathrm{A}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=6;$$

$$\mathrm{A}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=14;\qquad \mathrm{A}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1;\qquad \mathrm{A}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-5;$$

$$\mathrm{A}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-7;\qquad \mathrm{A}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5;\qquad \mathrm{A}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4.$$

Пример 4. Вычислить определитель четвертого порядка $|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}4 & 6 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 4 & 6\end{vmatrix}.$

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем:

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}4 & 6 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 4 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12 & 2 & -2 & 4\\ 13 & -4 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -10 & 12 & 4 & 6\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}12 & 2 & 4\\ 13 & -4 & 1\\ -10 & 12 & 6\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью свойства 6, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элемента 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 12 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144.$$

Пример 5. Вычислить определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

(Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю).

Раскладывая по первому столбцу, получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 2 \cdot 3(-1) \cdot 4 + 0 = -24.$$

Задания для решения в аудитории

1. Вычислить определители:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$

2) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

3) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

4) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

5) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

6) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

1.4 Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется **обратной по отношению к квадратной матрице** A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка. Необходимо отметить, что для существования матрицы A^{-1} является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля $(|A| \neq 0)$, то такая квадратная матрица называется **невырожденной**, или **неособенной**; в противном случае (при $|A| = 0$) - **вырожденной**, или **особенной**.

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратная матрица A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу A', транспонированную к A.

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij} = A_{ji} \left(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2 \ldots n\right)$ и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji} (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots n)$.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}; \left(|A| \neq 0\right)$.

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} исходя из ее определения $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ (п. 5 не обязателен).

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти матрицу, обратную к данной, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Определитель матрицы $|A| = 21 \neq 0$, т.е. матрица A – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим матрицу A', транспонированную к A:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу $\widetilde{A}$, учитывая, что $A'_{ij} = A_{ji}$: $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0}{21} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{6}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}.$$

5. Поверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Задание для решения в аудитории

Найти обратные матрицы для матриц:

1) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.5 Ранг матрицы

В матрице А размером $m \times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k-го порядка, где $k \le \min(m;n)$. Определители таких подматриц называются **минорами k-го порядка матрицы А**.

Например, из матрицы $A_{3\times 4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы А обозначается rang A, rg A или r (A). Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A) \le \min(m;n)$;

б) $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда элементы матрицы равны нулю, т.е. А=О;

в) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица А – невырожденная.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы. Назовем **элементарными преобразованиями** матрицы следующие:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).

2. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.

3. Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.

4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

5. Транспонирование матрицы.

Теорема 1. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т.е. ее ранг не изменяется.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Матрица А называется **ступенчатой**, если она имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0,\ i=1,2,\dots,r;\ r \leq k$.

Замечание. Условие $r \leq k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор r-го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Покажем на примере вычисление ранга матрицы с помощью окаймляющих миноров и элементарных преобразований.

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Решение. Для матрицы $A_{3\times4}$ ранг $r(A) \leq \min(3;4)=3$. Проверим, равен ли ранг трём, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т.е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A) \leq 2$. Так как существует ненулевой минор второго порядка, например $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-7\neq0$, то $r(A)=2$.

Пример 2. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Если $a_{11}=0$, то при перестановке строк или столбцов добиваются того, что $a_{11} \neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы.

2. Если $a_{11} \neq 0$, то, умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11} = 0,\ -a_{31}/a_{11} = 2,\ -a_{41}/a_{11} = 1$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$ (в данном случае $a_{22} = -1 \neq 0$), то, умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно на $-a_{32}/a_{22} = -3,\ -a_{42}/a_{22} = -3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а, следовательно, и данной матрицы равен двум.

Задания для решения в аудитории

Найти ранг матрицы:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & 4 & 18 \\ -3 & 18 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 7 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

Глава 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод обратной матрицы, формулы Крамера, метод Гаусса

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij}, b_i \left(i = 1, 2\ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$ - произвольные числа, называемые соответственно **коэффициентами при переменных** и **свободными членами** уравнений. В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$$

Решением системы (1) называется такая совокупность n чисел $\left(x_1 = k_1,\ x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n\right)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений. Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Например, система уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ - совместная и определенная, так как имеет единственное решение (10;0); система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ несовместная, а система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ - совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а точнее, бесконечное множество решений $\left(x_1 = c,\ x_2 = 10 - 2c, \text{ где } c - \text{любое число}\right)$.

Две системы уравнений называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (1) в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, их произведение $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_x + ... + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ есть матрица-столбец.

Элементами полученной матрицы являются левые части системы (1). На основании определения равенства матриц систему (1) можно записать в виде:

$$AX = B. \qquad (2)$$

Пусть число уравнений системы (1) равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется **определителем системы**.

Для получения решения системы (1) при $m = n$ предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая слева обе части матричного равенства (2) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец:

$$X = A^{-1}B \qquad (3)$$

Теорема Крамера. Пусть Δ - определитель матрицы системы (2), а Δ_j- определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j = 1, 2, ..., n). \qquad (4)$$

Формулы (4) получили название формул Крамера.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (1) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11}$, $-a_{31}/a_{11}, \dots, -a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, …, m-му уравнению системы (1), исключим переменную x_1, из всех последующих уравнений, начиная со второго. Получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases},$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$). Умножая второе уравнение на подходящие числа $\left(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, \ldots, \ldots, -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right)$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, …, m–му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных $x_3, x_4, \ldots, x_{r-1}$, после $(r-1)$–го шага, получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \qquad (5)$$

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$. Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система (2) несовместна.

Таким образом, для любой совместной системы числа $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ в системе (5) равны нулю. В этом случае последние $m-r$ уравнений в системе (5) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (1). Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (5) равно числу переменных, т.е. $r = n$ (в этом случае система (5) имеет треугольный вид); б) $r < n$ (в этом случае система (5) имеет ступенчатый вид). Переход системы (1) к равносильной ей системе (5) называется **прямым ходом** метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (5) – **обратным ходом.**

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу:

$$A_1=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

называемую **расширенной матрицей системы** (1), так как в нее, кроме матрицы системы А, дополнительно включен столбец свободных членов.

Решение типовых примеров

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}.$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Обозначим $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Тогда в матричной форме данная система имеет вид $AX=B$. Найдем определитель $|A|=5$. Так как $|A|\neq 0$, матрица А – невырожденная, и существует обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix};\ X=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

б) Найдем определитель системы $\Delta=|A|=5$. Так как $\Delta\neq 0$, по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матриц А, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 11 & 1 & 1\\ 8 & 1 & 2\end{vmatrix}=20;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 11 & 1\\ 1 & 8 & 2\end{vmatrix}=10;\ \ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}=5.$$

Теперь по формулам Крамера (4):

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{5}=4;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{10}{5}=2;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{5}{5}=1,$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

Пример 2. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6,\\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=18,\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4,\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8.\end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -2 & 6\\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18\\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8\end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11}\neq 0$, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2), (-3), (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)}=0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -2 & 6\\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6\\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14\\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -2 & 6\\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14\\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6\\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20\end{array}\right).$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)}=-4\neq 0$, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -2 & 6\\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14\\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -2 & 6\\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14\\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8}\end{array}\right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)}=-8\neq 0$, умножаем третью строку на $13{,}5/8=27/16$ и, прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ \quad -4x_2-10x_3+8x_4=-14, \\ \qquad\qquad -8x_3+x_4=6, \\ \qquad\qquad\quad -\dfrac{117}{16}x_4=\dfrac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4=-2$; из третьего $x_3=\dfrac{6-x_4}{-8}=\dfrac{6+2}{-8}=-1$; из второго $x_2=\dfrac{-14-8x_4+10x_3}{-4}=\dfrac{-14-8(-2)+10(-1)}{-4}=2$ и из первого уравнения $x_1=6+2x_4-3x_3-2x_2=6+(-2)-3(-1)-2\cdot 2=1$, т.е. решение системы $(1;\ 2;\ -1;\ 2)$.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=7, \\ 2x_1-3x_2+x_3=3, \\ 4x_1+x_2-x_3=16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0=-1$, следовательно, данная система несовместна.

Задания для решения в аудитории

Решить систему линейных уравнений матричным методом, по формулам Крамера и методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x+y-z=36 \\ x-y+z=13 \\ -x+y+z=7. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x + y + z = 5 \\ 6x + 3y + 4z = 1 \\ 7x + 2y + 5z = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 2x+y-5z=-1 \\ x-y-z=-2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$

Глава 3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

3.1 Числовая последовательность и ее предел

Определение 1. Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1, 2, 3, ..., n, ...$ поставлено в соответствие действительное число u_n, то множество действительных чисел $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ называется числовой последовательностью и обозначается $\{u_n\}$.

Числа $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ называются элементами последовательности. u_n – общий член последовательности.

Последовательность $\{u_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число М, что для любого ее элемента u_n выполняется неравенство:

$u_n \le M \qquad (u_n \ge M)$.

Последовательность $\{u_n\}$ называется ***ограниченной***, если она ограничена сверху и снизу.

Определение 2. Число a называется пределом числовой последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что для $n > N$ выполняется неравенство:

$|u_n - a| < \varepsilon$.

Символическая запись $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Последовательность, имеющую предел, называют сходящейся.

Неравенство $|u_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенству $a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$, которое означает, что все элементы последовательности $\{u_n\}$, номера которых $n > N$, находятся в ε – окрестности точки a.

Теорема 1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 3. Алгебраическая сумма, произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен соответственно алгебраической сумме, произведению пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \pm \lim_{n\to\infty} v_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \cdot v_n = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Теорема 4. Частное двух сходящихся последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \ne 0$, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}.$$

Теорема 5. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Пример. Доказать, что последовательность $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},...,\frac{n}{2n+1},...$ при $n\to\infty$ имеет пределом число $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что существует такое число $N=N(\varepsilon)$, что при $n>N$ выполняется неравенство:

$$\left|u_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

Найдем $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2(2n+1)}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}$.

Таким образом, неравенство $\left|u_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ выполняется, если $\frac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$, откуда $2(2n+1)\varepsilon>1$ или $n>\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$.

В качестве числа N можно взять целую часть числа $\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$.

Зададим $\varepsilon=\frac{1}{40}$, тогда $n>\frac{1}{4\cdot\frac{1}{40}}-\frac{1}{2}=19\frac{1}{2}$.

Следовательно, начиная с номера $n=20$, будет выполняться неравенство $\left|u_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$, то есть, $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{40}$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

3.2 Предел функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть $x_0\in X$ или $x_0 \overline{\in} X$. Возьмем из множества X последовательность $x_1,x_2,...,x_n,...$, элементы которой отличны от x_0 $(x_n\neq x_0)$, сходящуюся к x_0. Последовательность функции $f(x_1), f(x_2),..., f(x_n),...$ тоже образуют числовую последовательность.

Определение 1. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ (или при $x\to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента *x*, отличных от x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу A.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Функция $y=f(x)$ в точке x_0 может иметь только один предел.

Определение 2. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (или в точке x_0), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_0 так, что x принимает только значения, меньшие x_0, то число A_1 называется левым пределом функции $f(x)$ в точке x_0.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или $f(x_0 - 0) = A_1$.

Аналогично определяется правый предел функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_0, при $x > x_0$:

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ или $f(x_0 + 0) = A_2$.

Если левый и правый пределы функции $y = f(x)$ существуют и равны, то есть $A_1 = A_2 = A$, то число А есть предел этой функции в точке x_0, то есть, если:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A, \text{ то } \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Определение 3. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $M > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) = B$, то функции $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$ и $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеют в точке x_0 пределы равные соответственно $A \pm B$; $A \cdot B$ *и* $\dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

Теорема 2. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) \right]^n$.

Теорема 3 . $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} C = C$.

Теорема 4 . $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} C f(x) = C \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$.

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ – имеет предел в данной точке x_0. Тогда она ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема 6. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $q(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, за исключением может быть, самой точки x_0, и для всех

$x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq q(x) \leq \varphi(x)$. Пусть, кроме того $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} q(x) = A$.

3.3 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1. Функции $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$.

Определение 2. Функции $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Теорема. Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию, являются бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.

Теорема о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ имела пределом число А, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \to x_0$.

Деление одной бесконечно малой функции на другую может привести к различным результатам.

Пусть $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \alpha(x) = 0, \quad \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \beta(x) = 0.$

1) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$ то $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

2) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0,$ то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые одного порядка.

3) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$ то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Важнейшие эквивалентности

1) $\sin x \sim x$;

2) $\operatorname{tg} x \sim x$;

3) $\arcsin x \sim x$;

4) $\operatorname{arctg} x \sim x$;

5) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;

6) $e^x - 1 \sim x$;

7) $a^x - 1 \sim x$;

8) $\ln(1+x) \sim x$;

9) $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$;

10) $(1+x)^k - 1 \sim kx$;

(в частности $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$).

4) Если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$– бесконечно малая *n*-го порядка относительно $\beta(x)$.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех *x*, удовлетворяющих неравенству, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$. В этом случае записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Аналогично определяется бесконечно большая функция при $x \to \infty$.

Теорема о связи между бесконечно малой и бесконечно большой функциями.

Функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой. Функция обратная бесконечно большой, является бесконечно малой.

3.4 Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

3.5 Вычисление пределов

При вычислении предела функции $y = f(x)$ приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция $f(x)$является элементарной и предельное значение аргумента функции принадлежит её области определения, тогда вычисление

предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, так как предел элементарной функции $f(x)$ при $x \to x_0$, где x_0 входит в область её определения, равен частному значению функции при $x = x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ не определена, или же вычисляется предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$.

Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях вопрос сводится непосредственно к применению теорем о пределах, свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ или при $x \to \infty$ представляет собой неопределённость типа «$\frac{0}{0}$»; «$\frac{\infty}{\infty}$»; «$0 \cdot \infty$»; «$\infty - \infty$»; «1^∞»; «0^0»; «∞^0».

Решение типовых примеров

Задача 1. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + 1\right) = 5 \neq 0$, то применим теорему о пределе частного:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = \frac{4 + 2 - 2}{4 + 1} = \frac{4}{5}.$$

2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 5x - 3}{loq_2\left(x^2 + 1\right)}$.

Решение.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x - 3}{loq_2\left(x^2 + 1\right)} = \frac{(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 3}{loq_2\left[(-1)^2 + 1\right]} = \frac{-7}{loq_2 2} = -7$$

3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) \cdot \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=$$

4

$$=-\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Решение. Функция $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ в точке $x=2$ не определена. Так как при $x=2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то имеем неопределенность вида «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было бы сократить на $x-2$. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, так как $x^2-5x+6=0$ при $x_1=2,\quad x_2=3$.

$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, так как $x^2-3x+2=0$ при $x_1=2,\quad x_2=1$.

Итак, имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=\frac{2-3}{2-1}=-1.$$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}$.

Решение. При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, имеем неопределенность «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было сократить на $x-3$. Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное иррациональному выражению $3-\sqrt{x+6}$, то есть на выражение $3+\sqrt{x+6}$, получим

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(3-\sqrt{x+6}\right)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$ {перемножив сопряженные выражения, избавимся от иррациональности в числителе} =

$$=\lim_{x\to 3}\frac{9-(x+6)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=-\frac{1}{3+\sqrt{3+6}}=-\frac{1}{3+3}=-\frac{1}{6}.$$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{x+6}-2\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+6-4}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\frac{1}{-4\left(\sqrt{4}+2\right)}=-\frac{1}{4\left(2+2\right)}=-\frac{1}{16}.$$

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(x+1-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(x+3-4\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+3}+2}{\sqrt{1+1}+\sqrt{2}}=\frac{2+2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^3+1\right)=\infty;\quad \lim_{x\to\infty}\left(3x^2+2x-1\right)=\infty$$

Следовательно, имеет место неопределенность вида «$\dfrac{\infty}{\infty}$». Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на старшую степень дроби, то есть на x^3, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\infty.$$

Предел знаменателя равен нулю, следовательно, в знаменателе бесконечно малая функция. Далее применили теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Решение. В заданном примере имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение, то есть на $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)=\infty$, значит в знаменателе бесконечно большая функция. Далее применим теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

10. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{3-x}-\frac{2}{9-x^2}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Приведем дроби, стоящие под знаком предела, к общему знаменателю, получим:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{3-x}-\frac{2}{9-x^2}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{3+x-2}{9-x^2}=\lim_{x\to 3}\frac{1+x}{9-x^2}=\infty.$$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Для вычисления этого предела воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{x\cdot x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=8\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=8\cdot 1=8$$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$.

Решение. В данном примере имеем неопределенность вида «1^∞». Для его вычисления используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}=e^{6}.$$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\cos 4x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}\cdot\cos 0=\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}.$$

При вычислении этого предела воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin x\sim x$ при $x\to 0$. Следовательно, $\sin 3x\sim 3x$ и $\sin 4x\sim 4x$ при $x\to 0$. Затем бесконечно малые функции в числителе и в знаменателе заменили эквивалентными им функциями.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}+2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида « 1^{∞}». Для вычисления предела используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}+2}=\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}\cdot(1-5x)^{2}=$

$$=\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}\cdot(-5)}\cdot 1=\left[\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}\right]^{-5}=e^{-5}.$$

Вычислить односторонние пределы:

16. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{4}{(x-2)^{3}}$.

Решение. Пусть $x<2$, тогда при $x\to 2-0$ функции $x-2$ и $(x-2)^{3}$ являются отрицательными бесконечно малыми, поэтому $\dfrac{4}{(x-2)^{3}}$ – отрицательная бесконечно большая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{4}{(x-2)^{3}}=-\infty.$$

При $x>2$ функции $x-2$ и $(x-2)^{3}$ – положительные бесконечно малые, поэтому $\dfrac{4}{(x-2)^{3}}$ – положительная бесконечно большая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{4}{(x-2)^3}=+\infty.$$

17. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение. При $x\to 1-0$ функция $x-1$ – отрицательная бесконечно малая, следовательно $\dfrac{1}{x-1}$ – отрицательная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно малая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1.$$

При $x\to 1+0$ функция $x-1$ – положительная бесконечно малая, следовательно, $\dfrac{1}{x-1}$ – положительная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно большая положительная функция. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0.$$

Задания для решения в аудитории

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-8x-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2+10}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5x-6}{3x^2+7x-x^3-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

10. $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n+3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+4}\right)^{4x+2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{ctgx}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right).$

14. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}}{3x^2-8x-3}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 3x\cdot \operatorname{ctg} 5x$

3.6 Непрерывность функции

а) Определение непрерывности функции в точке

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, то есть:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$, так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Таким образом, для непрерывной функции можно менять знак функции и знак предела.

Из определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 следует:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

или

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$$

Определение 2. (на языке «$\varepsilon-\delta$»). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству:

$$|x-x_0|<\delta$$

выполняется неравенство $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

Разность $x-x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается $\Delta x = x-x_0$.

Разность $f(x)-f(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0 и обозначается

$$\Delta f(x_0) = f(x)-f(x_0) \text{ или } \Delta y = f(x)-f(x_0).$$

Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Теорема 1. Все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Теорема 2. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции в точке x_0, то функции $f(x)\pm\varphi(x)$; $f(x)\cdot\varphi(x)$; $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ также непрерывны в точке x_0 (последняя при условии, что $\varphi(x_0)\neq 0$).

Теорема 3. Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f\left[\varphi(x)\right]$ непрерывна в точке x_0.

Функция $f(x)$ называется непрерывной на $[a,b]$, если она непрерывна в каждой его точке.

б) Точки разрыва функции

Определение 1. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если эта функция не является непрерывной в точке x_0 .

Определение 2. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если в этой точке существуют односторонние пределы. Разрывы первого рода делятся на два вида: скачки и устранимые разрывы.

Если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 существуют, но не равны, то в точке x_0 функция имеет скачок:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

или

$$f(x_0-0) \neq f(x_0+0).$$

Если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 существуют и равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет устранимый разрыв:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$$

или

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0).$$

Задания для решения в аудитории

1. Показать, что при $x\to 4$ функция $y=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ имеет разрыв.

2. Исследовать функцию на непрерывность и найти точки разрыва. Построить схематично график этой функции в окрестностях точек разрыва:

а) $y=\dfrac{1}{x-3}$.

б) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

в) $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

г) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$.

Глава 4 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1 Производная функции

Определение 1. Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции $\triangle f(x)$ в этой точке к приращению аргумента $\triangle x$, при условии, что $\triangle x \to 0$.

Обозначение производной функции $y = f(x)$

$$f'(x), y', \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx}.$$

По определению:

$$f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

или

$$y' = \lim_{x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

Операцию нахождения производной называют дифференцированием.

Основные правила и формулы дифференцирования

1.	$(u+v-w)' = u'+v'-w'$	
2.	$(uv)' = u'v+v'u$	
3.	$(cu)' = cu'$	
4.	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$	$c'=0, \quad c=const$
5.	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$	$x'=1$
6.	$(u^a)' = au^{a-1}\cdot u'$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
7.	$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}; \qquad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
8.	$(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$	$(a^x)' = a^x\cdot\ln a$
9.	$(e^u)' = e^u\cdot u'$	$(e^x)' = e^x$
10.	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

11.	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$
12.	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\sin x)' = \cos x$
13.	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$(\cos x) = -\sin x$
14.	$(\mathrm{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
15.	$(\mathrm{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
16.	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17.	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
18.	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
19.	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Решение типовых примеров

Найти производные от функций:

а) Производные элементарных функций

Пример 1. $y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$

Решение:

$$y' = 15x^2 - 4x + 3$$

Пример 2. $y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}$

Решение:

Перепишем заданное выражение, используя дробные и отрицательные показатели:

$$y = 2x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-2}$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 3 \cdot (-2)x^{-3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}$$

Пример 3. $y = x^3 \cos x$

Решение:

По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$y' = (x^3)'\cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

Пример 4. $y = \dfrac{arctgx}{x^3}$

Решение:

Применим правило дифференцирования дроби:

$$y' = \frac{(arctgx)'x^3 - arctgx(x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{x^3 \cdot \dfrac{1}{1+x^2} - arctgx \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x - 3(1+x^2)arctgx}{x^4(1+x^2)}$$

б) *Производные сложных функций*

Пример 5. $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$.

Решение:

Вводим вспомогательную функцию $u = x^2 + 3x + 1$, тогда можно записать $y = \sqrt{u}$, зная, что:

$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, получим $y' = \dfrac{(x^2+3x+1)'}{2\sqrt{x^2+3x+1}} = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}$

Пример 6. $y = (x^2 + 5x + 7)^8$

Решение:

Пусть $u = x^2 + 5x + 7$, тогда $y = u^8$, $y' = 8u^7 \cdot u'$

$u' = 2x + 5$

$y = 8(x^2 + 5x + 7)^7 (2x + 5)$

Задания для решения в аудитории

Найти производную заданной функции:

1. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$

2. $y = \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$

3. $y = x^2 ctgx$

4. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

6. $y = \ln(x^3 + 7x + 2)$

7. $y = \ln(arctgx)$

8. $y = e^{\arcsin x}$

9. $y = \sin^3 x$

10. $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$

4.2 Производные высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) от функции $y = f(x)$ называется производная от её производной $y' = f'(x)$, то есть:

$$y'' = \left[f'(x) \right]'$$

Производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от её $(n-1)$-ой производной:

$$y^{(n)} = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'.$$

Обозначения y'', $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$; $y^{(n)}$; $\dfrac{d^n y}{dx^n}$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти производную 2-го порядка от функции $y = \sin^2 x$.

Решение:

$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x \qquad y'' = 2\cos 2x$

Пример 2. Найти производную третьего порядка функции $y = x\ln 2x$.

Решение:

Продифференцируем эту функцию трижды:

$$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1;$$

$$y'' = (\ln 2x + 1)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x};$$

$$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Итак, $(x\ln 2x)''' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Задания для решения в аудитории

Найти производную 2-го порядка от функции

1) $y = \sin^2 x$

2) $y = \dfrac{1}{1+2x}$

3) $y = e^{x^2}$

4) $y=\sqrt{x^2+1}$

4.3 Производная неявно заданной функции

Функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$, если при подстановке её в это уравнение, она обращает его в тождество:

$$F(x, f(x))\equiv 0.$$

Если функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$, то для нахождения производной y' нужно продифференцировать по x обе части этого уравнения, учитывая, что y есть функция от x, а затем разрешить полученное уравнение относительно y'.

Чтобы найти y'' неявно заданной функции, надо уравнение $F(x,y)=0$ дважды продифференцировать по x и т.д.

Решение типовых примеров

Найти производную неявно заданной функции

Пример 1. $xy^2=\operatorname{ctg} y$.

Решение:

$x'y^2+2xyy'=-\dfrac{y'}{\sin^2 y}$; $y^2+2xyy'=-\dfrac{y'}{\sin^2 y}$; $y^2\sin^2 y=-y'\left(2xy\sin^2 y+1\right)$;

$y'=-\dfrac{y^2\sin^2 y}{2xy\sin^2 y+1}$.

Пример 2. Найти y': $x^3\cdot y^2+5xy+4=0$

Решение:

Рассматриваем y как функцию x. Находим производную.

$3x^2\cdot y^2+2x^3yy'+5y+5xy'=0$

Решаем полученное уравнение относительно y’:

$y'=-\dfrac{3x^2y^2+5y}{2x^3y+5x}$

Пример 3. $arctgy - y + x = 0$ Найти y'.

Решение:

$\dfrac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0$ или $y' - y' - y^2 y' + 1 + y^2 = 0$. $y' = \dfrac{1+y^2}{y^2} = \dfrac{1}{y^2} + 1$, тогда

$y'' = -2y^{-3} \cdot y' = -\dfrac{2y'}{y^3}$. В правую часть вместо *y* подставим его значение:

$$y'' = -\frac{2}{y^3} \cdot \left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}$$

Задания для решения в аудитории

Найти производную неявно заданной функции

1) $x^2 + y^2 - xy = 0$

2) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$

3) $x^3 - y^3 = x^2 y^2$

4) $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$

5) $\ln y + \dfrac{y}{x} = 0$

4.4 Дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. имеет в этой точке конечную производную $y' = f'(x)$, то:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Определение 2. $f'(x)\Delta x$ приращения функции Δy, линейная относительно приращения аргумента Δx, называется дифференциалом функции и обозначается:

$$df(x) = f'(x)\Delta x \quad \text{или} \quad dy = y'\Delta x.$$

Положив $y = x$, получим $dx = \Delta x$ и поэтому $dy \approx y'd\,x$ или $df(x) = f'(x)d\,x$, отсюда $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Из определения следует, что при достаточно малом приращении аргумента $\Delta x = dx$:

$$\Delta f(x) \approx df(x) \quad \text{или} \quad \Delta y \approx dy.$$

Так как

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

то

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \approx f(x) + df(x).$$

Итак,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Последняя формула применяется в приближенных вычислениях для вычисления значения функции, близкого к значению $f(x)$.

Дифференциал сложной функции $y = f\left[u(x)\right]$ имеет вид:

$$dy = df(u)du = df(u)u'(x)dx.$$

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка, т.е.:

$$d^2y = d(dy) = y''dx^2$$

или

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2,$$

отсюда

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Дифференциал n – го порядка имеет вид:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$

или

$$d^n y = y^{(n)}dx^n,$$

отсюда $$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Решение типовых примеров

Найти дифференциал функции

Пример. $y = (1+\operatorname{tg} x)^3$.

Решение:

$dy = y'dx$

$$y' = \left[(1+\operatorname{tg} x)^3\right]' = 3(1+\operatorname{tg} x)^2 \cdot (1+\operatorname{tg} x)' = 3(1+\operatorname{tg} x)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом,

$$dy = \frac{3(1+\operatorname{tg} x)^2\, dx}{\cos^2 x}.$$

Задания для решения в аудитории

Найти дифференциал функций:

1) $y = \sqrt{1+x^2}$

2) $y = \left(1+x-x^2\right)^3$

3) $y = x^2 e^x$

4.5 Правило Лопиталя

При вычислении предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ может оказаться, что при $x \to a$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю или бесконечности, т.е. являются одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими величинами. Говорят, что в этих случаях мы имеем дело с «неопределённостями» вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ *или* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Решение типовых примеров

«Неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$***»***

Пример 1. Найти пределы, применяя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-(2-2x)}{2\sqrt{2x-x^2}}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{-x+1}{x}}{\dfrac{-2(1-x)}{2\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x}=-1$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=(\textit{неопределённость}\left[\dfrac{0}{0}\right], \textit{применим правило Лопиталя})=$

$x\uparrow 0$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=(\textit{снова неопределённость}\left[\dfrac{0}{0}\right], \textit{вторично правило Лопиталя})=$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\dfrac{1}{6}.$

«Неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$***»***

Пример 2. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +0}-\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to +0}(-x)=0.$

Замечание: в условии задачи подчёркнуто, что $x\to +0$, это указание является существенным, потому что при $x\to -0$ и при $x\to 0$, предел не существует, т.к. отрицательные числа логарифмов не имеют.

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tg5x}=\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}\dfrac{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}{\dfrac{5}{\cos^2 5x}}=\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}\dfrac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x}$ (прежде чем применять правило Лопиталя, преобразуем дробь):

$\dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}(\dfrac{cos5x}{\cos 3x})^2=\dfrac{3}{5}(\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}\dfrac{cos5x}{\cos 3x})^2=\dfrac{3}{5}(\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}\dfrac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x})^2=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{25}{9}(\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x})^2=\dfrac{5}{3}(\dfrac{1}{-1})^2=\dfrac{5}{3}.$

«Неопределённость вида $[\infty-\infty]$***»***

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = +\infty$, то для определения предела $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - \varphi(x))$ надо преобразовать эту разность к такому виду:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\dfrac{1}{\varphi(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{\varphi(x)}}, \qquad \text{тогда} \qquad \lim_{x\to a}(f(x) - \varphi(x)) = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{\varphi(x)}}$$

учитывая, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = +\infty$, получили «неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$», которую мы умеем раскрывать с помощью правила Лопиталя.

Пример 3. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) =$ (при $x \to 1$ $\frac{1}{\ln x}$ и $\frac{1}{x-1}$ бесконечно большие величины одного порядка, а поэтому имеем неопределённость $[\infty - \infty]$):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x\ln x + x - 1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x + x - 1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2-x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}$

«***Неопределенности вида*** **$[0\cdot\infty]$**» могут быть сведены к «*неопределённости вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$ *или* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$».

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$,

тогда $f(x)\cdot\phi(x) = \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\phi(x)}} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $f(x)\cdot\phi(x) = \dfrac{\phi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$,

получим: $$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\phi(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\phi(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Пример 4. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to+0} x\cdot\ln x = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+0}(-x) = 0$.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ (при $x\to+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$)

«Неопределенности вида 1^{∞}, ∞^0, 0^0 » сводятся к «*неопределенности вида 0 ·∞*» с помощью тождества:

$$\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)} (f(x)>0) \quad \left[e^{\ln x} = x\right]$$

Можно записать:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} e^{\varphi(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)}$$

Дело сводится к определению предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)$.

Пример 5.Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \left[0^0\right] = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = e^0 = 1$,

$\left(\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+0}(-x) = 0\right)$

б) $\lim\limits_{x\to0}(1+mx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln x(1+mx)} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln x(1+mx)} = e^m$

$\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln x(1+mx) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+mx)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{m}{1+mx}}{1} = m\right)$

в) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx} = \lim\limits_{x\to+0} e^{tgx\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0} tgx\ln\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

$\left(\lim\limits_{x\to+0} tgx\ln\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{tgx}} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{-\dfrac{\cancel{1}}{\cancel{x^2}}\Big/\dfrac{\cancel{1}}{\cancel{x}}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to+0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x} = 0\cdot1 = 0\right)$

Задания для решения в аудитории

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{\sin 2x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{3}}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

4.6 Полное исследование функции и построение графика

При полном исследовании функции решаются следующие вопросы:

1. Нахождение области определения функции.
2. Выяснение вопроса о четности и нечетности функции.
3. Определение точек разрыва функции.
4. Определение асимптот графика функции.
5. Определение интервалов возрастания и убывания функции.
6. Определение экстремума функции.
7. Определение интервалов выпуклости и вогнутости графика.
8. Определение точек перегиба.

Полученные данные следует использовать для построения графика функции. Для большей точности эскиза графика рекомендуется построить ещё и отдельные точки графика, давая значения независимой переменной и определяя соответствующие значения функции. Полезно также получаемые данные сразу наносить на чертёж.

Решение типовых примеров

Исследовать функцию и построить график:

Пример 1. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$

1) $Д\left(y\right)=R$,

2) функция нечётная, т.к. $y\left(-x\right)=-\dfrac{2x}{1+x^2}$, т.е. $f(-x)=-f(x)$, следовательно, её график симметричен относительно начала координат.

3) Найдём асимптоты графика функции

а) функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

б) $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$$

$y=0$ (ось Ox) – горизонтальная асимптота.

4) Найдём первую производную и возможные точки экстремума:

$$y'=\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$y'=0 \qquad 1-x^2=0 \qquad x_{1,2}=\pm 1$.

5) Найдём вторую производную и возможные точки перегиба:

$$y''=\frac{-4x\left(1+x^2\right)^2-2\left(1-x^2\right)\cdot 2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$= \frac{-4x\left(1+x^2\right)-8x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{-4x-4x^3-8x+8x^3}{\left(1+x^2\right)^3} =$$

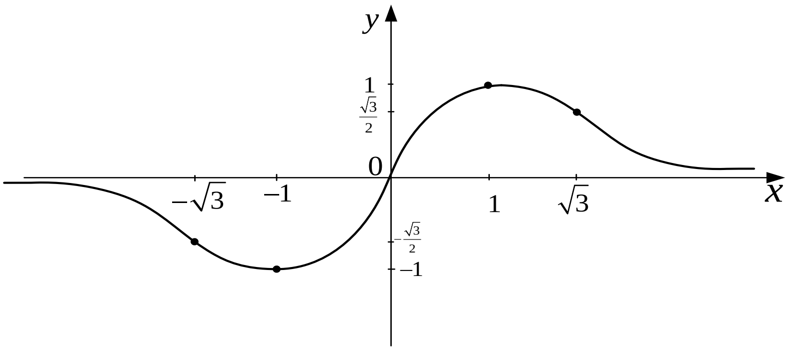
$$= \frac{4x^3-12x}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

$y''=0$ $\quad 4x(x^2-3)=0 \quad x_3=0 \quad x_{4,5}=\pm\sqrt{3}$.

1) Строим таблицу

x	0	(0; 1)	1	(1; $\sqrt{3}$)	$\sqrt{3}$	($\sqrt{3}$;$+\infty$)
y'	+	+	0	–	–	–
y''	0	–	–	–	0	+
y	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘
	т.п.		max		т.п.	

7) Строим график



Пример 2. $\quad y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$

1) $Д\left(y\right)=\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$

2) функция нечётная, т.к. $y\left(-x\right)=-\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=-y\left(x\right)$, следовательно, график симметричен относительно начала координат.

3) Найдём асимптоты графика функции:

а) $\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=\pm\infty \quad x=0$ - вертикальная асимптота

б) $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{2};\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)=0$$

$y=\dfrac{x}{2}$ - наклонная асимптота.

4) Найдём возможные точки экстремума:

$$y'=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2};\quad y'=0\qquad\qquad \frac{2}{x^2}=\frac{1}{2}\qquad\quad x^2=4\qquad x_{1,2}=\pm 2\ .$$

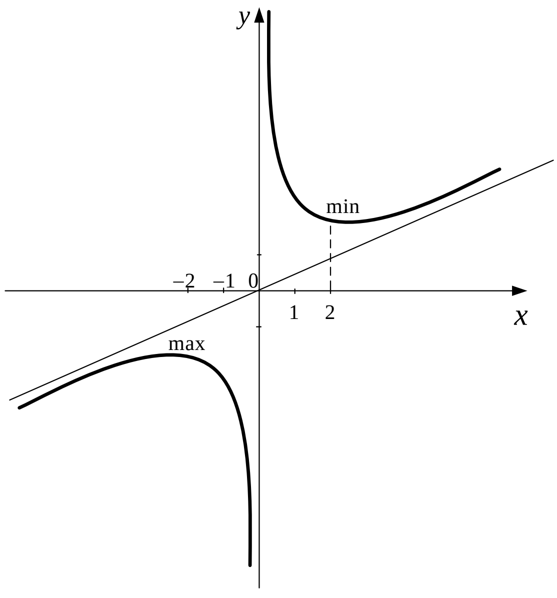
5) Найдём возможные точки перегиба:

$$y''=\frac{4}{x^3};\quad y\neq 0$$

6) Составим таблицу, учитывая нечетность функции

x	0	(0; 2)	2	$(2;+\infty)$
y'	$\nexists$	–	0	+
y''	$\nexists$	+	+	+
y	$\nexists$	$\searrow$	2	$\nearrow$
	т.р.		min	

7) Строим график функции



Задания для решения в аудитории

Исследовать функцию и построить график:

1) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

2) $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x + 3}$

3) $y = x^4 - 4x^2 + 3$

ГЛАВА 5 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1 Область определения функции

Функции одной переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Поэтому вводится понятие функции нескольких переменных.

Все основные положения теории функции нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных и обобщаются на случай большего числа переменных.

Переменная величина *z* называется функцией двух независимых переменных *x* и *y*, если каждой паре (*x, y*) значений двух независимых друг от друга переменных величин *x* и *y* из некоторой области изменения *D* соответствует определённое единственное значение величины *z*.

Обозначается функция 2-х переменных:

$z = f(x,y), \quad z = z(x,y), \quad F(x,y,z) = 0.$

Множество пар (*x, y*) значений *x* и *y*, при которых определена функция $z = f(x,y)$ называется **областью определения функции** и обозначается $D(z)$ или $D(f)$.

Каждой паре значений (*x, y*) в плоскости *xOy* соответствует точка *M*(*x,y*). Поэтому пару значений (*x, y*) называют точками, а функцию $z = f(x,y)$ называют функцией точки *M*(*x,y*) плоскости *xOy* и записывают $z = f(M)$.

Решение типовых примеров

1 Найти область определения функции $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Решение

Функция *z* принимает действительные значения при условии $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, то есть $x^2 + y^2 \leq a^2$. Областью определения данной функции является круг радиуса a с центром в начале координат, включая граничную окружность.

2 Найти область определения функции $z = \ln\left(x^2 - y^2 - R^2\right), R > 0$.

Решение

Область определения функции характеризуется неравенством

$x^2 - y^2 > R^2$. Область определения – внутренняя часть гиперболы $\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} = 1$ с асимптотами $y = \pm x$, полуосями $a = b = R$, фокусами $F_1 = \left(-R\sqrt{2};0\right), F_2 = \left(R\sqrt{2};0\right)$ ($c^2 = a^2 + b^2 = 2R^2$).

5.2 Частные производные функции нескольких переменных

Частной производной по x функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения по x $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю и обозначается z_x', $f_x'(x, y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

По определению $z_x' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Аналогично

$$z_y' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Значение частной производной зависит от точки, в которой она вычисляется. Поэтому частная производная есть функция точки (x, y), т.е. также является функцией 2-х переменных.

Частные приращения и производные функции n переменных $(n > 2)$ определяются и обозначаются аналогично.

Из определения частных производных следует, что при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

Все правила и формулы дифференцирования для функции одной переменной сохраняются для частных производных функции нескольких переменных.

Решение типовых примеров

1. Найти частные производные функций:

а) $z = e^{x^2 + y^2}$;

Решение

Рассматривая у как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 + y^2} \left(x^2 + y^2\right)_x' = 2xe^{x^2 + y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 + y^2} \left(x^2 + y^2\right)_y' = 2ye^{x^2 + y^2}.$$

б) $z = y \ln\left(x^2 - y^2\right)$.

Решение

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln\left(x^2 - y^2\right) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2} \quad .$$

Задания для решения в аудитории.

1) Найти и изобразить область определения функции:

1.

$$z = \arcsin\left(1 - x^2 - y^2\right) + \arcsin 2xy$$

2.

$$z = \sqrt{x + y - 1} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

3.

$$z = \sqrt{xy}$$

4.
$z = y + \sqrt{x}$

5.
$z = \dfrac{4}{x + y}$

2) Найти частные производные функций:

1. $U = x^2 + 3xy + 4y^2$

2. $U = \sin(3x + 5y - 4z)$

3. $U = e^{\frac{x}{y}}$

4. $z = \ell n\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

5.3 Полный дифференциал. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Главная часть полного приращения

$\Delta z = f_x'(x,y) \cdot \Delta x + f_y'(x,y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$

функции $z = f(x,y)$, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, называется ***полным дифференциалом*** этой функции.

Обозначается полный дифференциал dz или $df(x,y)$.

По определению

$dz = z_x' \cdot \Delta x + z_y' \cdot \Delta y$ или $dz = f_x' \cdot \Delta x + f_y' \cdot \Delta y$, или $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Учитывая, что $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, можно записать $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x,y)$ справедливы приближенные равенства $\Delta z \approx dz$ и $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x,y) + dz$. Это соотношение используется в приближённых вычислениях для нахождения значений функции $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ близких к значению функции $f(x_0, y_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y'(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Решение типовых заданий

1. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$.

Решение

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Следовательно, $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

2. Вычислить приближенно $1{,}07^{3{,}97}$.

Решение

Число $1{,}07^{3{,}97}$ есть частное значение функции $z = f(x, y)$ при x = 1,07, y = 3,97. Известно, что f (1,4) = 1. Поэтому, принимаем x_0 = 1, y_0 = 4. Тогда

$\Delta x = x - x_0 = 0{,}07,\ \Delta y = y - y_0 = -0{,}03.$

Значение $f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right)$ вычислим при помощи формулы $f\left(x_0, y_0\right) + df\left(x_0, y_0\right)$. Имеем:

$f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_y = x^y \ln x,\ f'_x(1,4) = 4,\ f'_y(1,4) = 0,$

$df(1,4) = 4 \cdot 0{,}07 + 0 \cdot (-0{,}03) = 0{,}28.$

Таким образом, $1{,}07^{3{,}97} \approx 1 + 0{,}28 = 1{,}28$.

Задания для решения в аудитории.

1). Найти полный дифференциал функций:

1. $z = \ell n\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

2. $z = arctg\,\frac{y}{x}$

3. $z = x\sin y + y\sin x$

4. $z=\dfrac{xy}{x-y}$

5. $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ *при* $x=3 \quad y=4 \quad \Delta x=0,1 \qquad \Delta y=0,2$

6. $z=e^{xy} \qquad x=1 \quad y=1 \quad \Delta x=0,15 \quad \Delta y=0,1$

2.) Вычислить приближенно.

1. $(1,03)^{3,001}$

2. $\sqrt{(6,03)^2+(8,04)^2}$

5.4 Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование неявной функции

Пусть $z = f(x,y)$ - функция двух переменных *x* и *y*, каждая из которых является функцией независимой переменной *t*, то есть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Тогда функция $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ является сложной функцией $z = z(t)$ независимой переменной *t*. Переменные *x* и *y* являются промежуточными аргументами.

Предположим, что $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемые функции. Имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если t совпадает с одним из аргументов, например, *t* = *x*, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

и $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной *z* по *x*.

Если аргументы *x* и *y* функции $z = f(x,y)$ являются функциями двух переменных: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, то $z = f(x(u,v), y(u,v))$ также является функцией двух переменных (u,v).

Пусть $z = f(x,y)$, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ - дифференцируемые функции. Имеют место формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Дифференциал сложной функции $z = z(x,y)$ где $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv.$$

Если $F(x,y)$ - дифференцируемая функция переменных x, y в некоторой области D и $F'_y(x,y) \neq 0$,то уравнение $F(x,y) = 0$ определяет однозначно неявную функцию $y(x)$, также дифференцируемую, и ее производная находится по формуле:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Решение типовых примеров

1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^5 + 2xy - y^3$ è $x = \cos 2t,\ y = \operatorname{arctg} t.$

Решение

Производную находим по формуле $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 2y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2,\ \frac{dx}{dt} = -2\sin 2t,\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}.$$

$$\frac{dz}{dt} = -2\left(5x^4 + 2y\right)\cdot\sin 2t + \left(2x - 3y^2\right)\cdot\frac{1}{\left(1+t^2\right)}.$$

В результате можно сохранить как переменные x и y, так и заменить их через t.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, где

$$\mathrm{z} = \ln\left(\mathrm{u}^2 + v^2\right),\ u = x\cos y,\ v = y\sin x.$$

Решение

$\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ находим по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v^2},\quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u^2+v^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = y\cos x,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v^2}\cdot\cos y + \frac{2v}{u^2+v^2}\cdot y\cos x = \frac{2}{U^2+V^2}\left(U\cos y + Vy\cos x\right) =$$

$$= \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}\left(x\cos^2 y + y^2\sin x\cos x\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v^2}\cdot x\sin y + \frac{2v}{u^2+v^2}\cdot\sin x = \frac{2}{U^2+V^2}\left(V\sin x + Ux\sin y\right) =$$

$$= \frac{2}{x^2 \cos^2 y + y^2 \sin^2 x} \left(y \sin^2 x - x^2 \sin y \cos y \right).$$

3. $\cos(x+y) + y = 0$. Найти y'.

Решение

Здесь $F(x,y) = \cos(x+y) + y = 0.$

Найдем $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\sin(x+y), \dfrac{\partial F}{\partial y} = -\sin(x+y) + 1.$

Следовательно, $y' = -\dfrac{-\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)} = \dfrac{\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}.$

Задания для решения в аудитории.

1) Найти:

1. $\dfrac{dz}{dt}$, *если* $z = x^2 + xy + y^2$, *где* $x = t^2 \quad y = t^3$

2. $\dfrac{dU}{dt} - ? \qquad U = \sin\dfrac{x}{y}$, *где* $x = e^t \quad y = t^2$

3.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} - ? \qquad \dfrac{dz}{dx} - ? \qquad z = \ell n\left(e^x + e^y\right)$, *где* $y = x^2$

4. $z = arctg\frac{u}{v}$ $\quad u = x\sin y$ $\quad v = x\cos y$ $\quad \frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$

5.
$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ и dz, если $z = \cos xy$, $x = ue^{v}$, $y = v\ln u$.

2) Найти y'.

1. $x^2 + xy + y^2 = 6$

2. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$

5.5 Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x, y).$$

Частные производные от частных производных $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x, y)$ называются частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$.

Каждая частная производная первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеет две частные производные. Таким образом, получаем четыре частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Производные $f''_{xy}(x, y)$; $f''_{yx}(x, y)$ называются смешанными производными второго порядка и $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по *x*, так и по *y*. Получим частные производные третьего порядка. Частная производная *n*-го порядка есть частная производная от производной (*n-1*)-го порядка.

Дифференциал от дифференциала *dz* в точке *M*(*x,y*) называется дифференциалом второго порядка в этой точке и обозначается $d^2 z$.

$$d(dz) = d(f_x'(x, y)dx + f_y'(x, y)dy) =$$

$$= f''_{x^2}(x, y)(dx)^2 + 2 f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{y^2}(x, y)(dy)^2,$$

$$d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Дифференциал от дифференциала (*n-1*)-го порядка называется дифференциалом *n*-го порядка функции $z = f(x, y)$: $d^n z = d\left(d^{n-1} z\right)$.

Выражение для dz символически можно записать в виде:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f\left(x, y\right).$$

При $n = 3$

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f\left(x, y\right) =$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

Решение типовых примеров

1. Найти все частные производные первого и второго порядков от функции $z = x^3 - x^2 y - y^3$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy; \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 - 3y^2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - 2xy\right) = 6x - 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 - 2xy\right) = -2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2 - 3y^2\right) = -2x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 3y^2\right) = -6y.$$

2. Найти $d^2 z$, если $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Решение

Находим первый дифференциал:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Второй дифференциал:

$$d^2z=\frac{2\left(xy\cdot dx^2+\left(y^2-x^2\right)dxdy-xydy^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Задания для решения в аудитории.

1) Найти частные производные второго порядка:

1. $z=x^4+3x^3y-4x^2y^2+5xy^3-y^4$

2. $z=y\ell nx$

3. $z=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$

2) Найти дифференциалы второго порядка:

1. $z = x^2 y^2$

2. $z = \cos\left(x + 2y^2\right)$

3) Найти полный дифференциал функции $z(x,y)$ заданной уравнением

$z^3 - 3xyz = a^3$

5.6 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $P_0(x_0;y_0;z_0)$ - фиксированная точка поверхности, заданной функцией $z = f(x,y)$ или уравнением $F(x,y,z)=0$. Касательной плоскостью к поверхности в точке P_0 называется плоскость t, проходящая через точку P_0 и такая, что угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку P_0 и любую точку поверхности, стремится к нулю, когда точка P стремится к P_0. Нормалью называется прямая *n*, проходящая через P_0 перпендикулярно касательной плоскости.

Нормальный вектор касательной плоскости t и направляющий вектор прямой *n* совпадают.

Если уравнение поверхности задано функцией $z = f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости:

$$z - z_0 = z'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z'_y(x_0,y_0)(y-y_0);$$

уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Если поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$, то уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) +$$
$$+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0) = 0;$$

уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Решение типовых примеров

1. Дана поверхность $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$. Составить уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности в точке M(1,1,1).

Решение

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

и их значения в точке M(1,1,1):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\bigg|_M = -1; \ \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_M = 2.$$

Уравнение касательной плоскости:

$z-1=-\left(x-1\right)+2\left(y-1\right),$ или $x-2y+z=0.$

Уравнение нормали:

$$\frac{\left(x-1\right)}{-1}=\frac{\left(y-1\right)}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$

Задания для решения в аудитории.

1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2+3y^2$ в точке M для которой $x=1$ $y=1.$

2. Составить уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $M(1,1,3)$.

$z=1+x^2+y^2$

5.7 Экстремум функции двух переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x,y)$, определенную и непрерывную в некоторой области D.

Функция $f(x,y)$ имеет строгий локальный максимум (минимум) в точке $M(x_0;y_0)$, если неравенство $f(x_0,y_0)>f(x,y)\left(f(x_0,y_0)<f(x,y)\right)$ имеет место во всех точках $M(x,y)\neq M_0$.

Необходимые условия экстремума:

Если дифференцируемая функция $z=f\left(x;y\right)$ имеет в точке $\grave{I}_{0}\left(x_0;y_0\right)$ экстремум, то в этой точке обе частные производные первого порядка равны нулю, то есть

$$f'_x(x_0;y_0)=0, \qquad f'_y(x_0;y_0)=0.$$

Точка $(x_0;y_0)$ называется стационарной точкой функции $f(x,y)$, если $df(x_0,y_0)=0$. Пусть $(x_0;y_0)$ - стационарная точка функции $f(x,y)$, обозначим $A=\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}$, $B=\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}$, $C=\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$.

Достаточные условия экстремума:

Если $AC-B^2>0$, и $A<0$, то $(x_0;y_0)$ - точка максимума.

Если $AC-B^2>0$, и $A>0$, то $(x_0;y_0)$ - точка минимума.

Если $AC-B^2<0$, то $(x_0;y_0)$ - не является точкой экстремума.

Если $AC-B^2=0$, то точка $(x_0;y_0)$ может как быть, так и не быть точкой экстремума, требуется дополнительное исследование.

Решение типовых примеров

1. Исследовать на экстремум функцию

$f(x,y)=4x^2y+24xy+y^2+32y-6.$

Решение

Область определения функции $D(f)$ - плоскость Oxy, $f(x,y)$ - дифференцируема в каждой точке Ì $(x;y)\in D(f)$.

Определим стационарные точки:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=8xy+24y=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4x^2+24x+2y+32=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y(x+3)=0,\\ 2x^2+12x+y+16=0.\end{cases}$$

$y=0;\ x^2+6x+8=0 \Rightarrow x_1=-4,\ x_2=-2,$

$x=-3,\ y=2.$

Получили три стационарные точки: M_1(-4,0), M_2(-2,0), M_3(-3,2).

Эти точки исследуем на достаточность условий экстремума:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=8y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=8x+24, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

Для каждой точки вычислим соответствующие *A, B, C*.

$M_1(-4;0)$: $A_1=0$, $B_1=-32+24=-8$, $C_1=2$, $A_1C_1-B_1^2=-64<0$, то есть $M_1(-4;0)$ не является точкой экстремума.

$M_2(-2;0)$: $A_2=0$, $B_2=-16+24=8$, $C_2=2$, $A_2C_2-B_2^2=-64<0$, то есть $M_2(-2;0)$ не является точкой экстремума.

$M_3(-3;2)$: $A_3=16$, $B_3=0$, $C_3=2$, $A_3C_3-B_3^2=32>0$ при этом $A>0$. Вывод: $M_3(-3;2)$ точка локального минимума функции $f(x,y)$, $f(-3;2)=-10$.

Задания для решения в аудитории.
Исследовать на экстремум функции:
1. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

2. $z = x^3 + y^3 - 9xy$

3. $z=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+2xy-5x-y+2$

Расчетно-графическая работа № 1

«Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений.»

Вариант 1

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

а) $\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases}$.

Вариант 2

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$

Вариант 3

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$

Вариант 4

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases}$$

Вариант 5

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Вариант 6

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$$

Вариант 7

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$$

Вариант 8

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$$

Вариант 9

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Вариант 10

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

Вариант 11

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Вариант 12

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

Вариант 13

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$$

Вариант 14

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$$

Вариант 15

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$$

Вариант 16

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & -2 \\ 1 & -3 & -7 & 6 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Вариант 17

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases}$$

Вариант 18

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$$

Вариант 19

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$$

Вариант 20

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases}$$

Вариант 21

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

Вариант 22

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$$

Вариант 23

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$$

Вариант 24

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$$

Вариант 25

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Вариант 26

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

Вариант 27

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Вариант 28

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

Вариант 29

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

Вариант 30

Задание 1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	***Задание 2.*** Умножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему методом Гаусса и матричным.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Расчетно-графическая работа № 2

«Пределы функций»

Вариант №1

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$

Вариант №2

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$

6. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$

Вариант №3

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$

Вариант №4

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 3x}{2\sin x}$

Вариант №5

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4+1}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{3x^2}$

Вариант №6

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$

Вариант №7

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+3}{5x^2+3x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$

6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$

Вариант №8

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$

9. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$

Вариант №9

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1-x^3+4x}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-sin2x}{x^2}$

Вариант №10

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^2+3x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos^2x}{xtgx}$

Вариант №11

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2+x+10}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

Вариант №12

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$

Вариант №13

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$

Вариант №14

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$

Вариант №15

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x+7}{2-3x+4x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$

Вариант №16

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{6x^2-5x+2}{4x^3+2x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^3-3x+1}{7x+5}$

6. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$

Вариант №17

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x-\sin 3x}{2x^2}$

Вариант №18

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$

Вариант №19

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1}$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x^2 + 5x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x^3 + 5x^2 - 3}{2x^2 - x + 7}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x + 3}{x^3 - 4x^2 - x}$

6. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{5x + 1} - 4}{x^2 + 2x - 15}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x - 7}{x + 1} \right)^{4x - 2}$

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x + 3}{3x - 1} \right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$

Вариант №20

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 12}$

2. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1}$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{x^4 - 2x^3 + 1}$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^4 + 5x}{2x^2 - 3x - 7}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 2}{x} \right)^{3 - 2x}$

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{6x + 5}{x - 10} \right)^{5x}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin 2x} - \dfrac{1}{tg 2x} \right)$

Вариант №21

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^x$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos^2 x-cos^2 2x}{x^2}$

Вариант №22

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{x^2-1/4}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right)^{3x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,5x}{x^2-x}$

Вариант №23

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$

6. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$

Вариант №24

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2-x-3x^2}{x^3-16}$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$

Вариант №25

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$

Вариант №26

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x-\sin 2x}{x^2}$

Вариант №27

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$

2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$

9. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$

Вариант №28

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$

Вариант №29

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$

Вариант №30

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$

Расчетно-графическая работа № 3

Вариант 1

1. Найти производную функций:

а). $y = e^{\sin x}x^5 + \lg(5x+1)$ в). $y = \sqrt{3x^2+1} + 2^{\operatorname{tg} x}$

б). $y = \dfrac{\cos^2 3x}{2x+3} - \arcsin 2x$ г). $x^2 - y^2 - 2y = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(x+1)}$; б). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$; в). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

Вариант 2

1. Найти производную функций:

а). $y = \operatorname{ctg}^2 8x - 2x^3 + 1$ в). $y = 3^{x^2}\sin 3x$

б). $y = \operatorname{arctg}^3(\cos x)$ г). $xy = ctgy$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$; б). $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\ln x$; в). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3\ln x}{x+2}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

Вариант 3

1. Найти производную функций:

а). $y = \dfrac{\arccos 2x}{x} - 8\sqrt{x} + 2x$ в). $y = \sqrt{7x^2+5} + 3^{\operatorname{ctg} x}$

б). $y = \ln(\sin 2x) + \cos 3x$ г). $x + y + arctg3x + tg2y = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0} xctg2x$; б). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; в). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-9}{2-3x-x^2}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2-3}{x-2}$

Вариант 4

1. Найти производную функций:

а). $y = tg^2 7x + 3x^2 + 8$ в). $y = \dfrac{\arcsin 3x}{x^2} + \sqrt[3]{x} - 1$

б). $y = 5^{x^3} \cos 8x$ г). $x^3 + y^3 = x^2 y^2$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{5}{x^5 - 1} - \dfrac{7}{x^7 - 1}\right)$; б). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 6x - \sin 7x}$; в). $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{2x - 3}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$

Вариант 5

1. Найти производную функций:

а). $y = \ln \cos 3x - \sin 2x$ в). $y = \ln^3 \dfrac{1}{x}$

б). $y = 2^{\ln x} \operatorname{arctg} 3x$ г). $\ln y + \dfrac{y}{x} = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$; б). $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$; в). $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - 4x - 2x^2}{2x - 1}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{3 - x^2}{x^3}$

Вариант 6

1. Найти производную функций:

а). $y = e^{tg\, x} \cdot x^4 - \ln(3x^3 + 5)$ в). $y = \sqrt{2x + 3} - 4^{tg\, x}$

б). $y = \dfrac{\sin^3 3x}{2x + 5} - \arcsin(3x + 1)$ г). $6^x + 6^y = 6^{x + y}$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x} - ctgx\right)$; б). $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{xe^x}{x + e^x}$; в). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

Вариант 7

1. Найти производную функций:

а). $y = \mathrm{ctg}^3 2x + 4x^2 + 5$ в). $y = \mathrm{arctg}^2(\sin x)$

б). $y = 4^{x^5} \cos 2x$ г). $y = 2x - arctgy$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$; б). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$; в). $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x})$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = x + \dfrac{1}{x^2}$

Вариант 8

1. Найти производную функций:

а). $y = \dfrac{\mathrm{arctg}\ 2x}{x} - \sqrt{x} + 2$ в). $y = \ln\sin 3x + \mathrm{tg}\ 8x$

б). $y = 2^{\ln x} \arccos 3x$ г). $5^x - \sin y = 5x + y^2$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\cos x - 1}$; б). $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$; в). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{1-xe^x}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{2-x}{(x+1)^2}$

Вариант 9

1. Найти производную функций:

а). $y = e^{\mathrm{ctg}\ x} x^7 - \ln(2x^2 + 8x)$ в). $y = \dfrac{\cos^3 2x}{5x+1} + \arcsin(2x+5)$

б). $y = \sqrt{2x^2+1} + 2^{\mathrm{ctg}\ x}$ г). $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{tg 3x}$; б). $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-2x}$; в). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2}{x^3+4}$

Вариант 10

1. Найти производную функций:

а). $y = tg^2\, 3x - 3x - 4$ в). $y = arcctg^2(\cos x)$

б). $y = 2^{x^2} \sin 3x$ г). $2y - 1 - xy^3 = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$; б). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} ctg 3x \cdot tgx$; в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{3x^3 + 4x}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$

Вариант 11

1. Найти производную функций:

а). $y = \dfrac{\arcsin 2x}{x} - \sqrt{x} + 5$ в). $y = \ln\cos 2x - ctg\, 3x$

б). $y = 4^{\ln x} \arcsin 2x$ г). $x^3 + x^2 y + y^2 - 1 = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{2x - \sin 2x}$; б). $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln^2 x$; в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x - 3}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{1 - x}{(x-2)^2}$

Вариант 12

1. Найти производную функций:

а). $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\cos 2x} + 2^x$ в). $y = \arcsin^2(e^x) + x^3$

б). $y = tg^3 x \cdot \dfrac{1}{x}$ г). $e^y + xy = e$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(1+x))^x$; б). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 6x}{x^2}$; в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 3x^3 + 5}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{1 + x + x^2}{1 + x}$

Вариант 13

1. Найти производную функций:

а). $y = \mathrm{arctg}^2 3x + 2x^4 + 1$ в). $y = \ln^2 \dfrac{\sin 3x}{x}$

б). $y = \mathrm{ctg}\, 3x \cdot \ln x$ г). $y^2 = x + \ln \dfrac{y}{x}$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x\cdot\cos x}{x - \sin x}$; б). $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot e^{x^{-2}}$; в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{15x^2 + 2x^4 - 5x}{18x^3 + x^2}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2}{(1+x)^2}$

Вариант 14

1. Найти производную функций:

а). $y = \sqrt[3]{3x^5 + 7} + \arccos 2x$ в). $y = \dfrac{\sin e^x}{x^2} + 2x^2 + 5x$

б). $y = \arcsin(5x+3)\cdot e^{2x}$ г). $tgy = xy - y$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - tgx}{x^2}$; б). $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{ctgx}{x} - \dfrac{1}{x^2})$; в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 - 3x - x^2}{2x^2 + x - 1}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

Вариант 15

1. Найти производную функций:

а). $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sin 3x} + 3^x$ в). $y = \arccos^2 5x + e^{x^2}$

б). $y = \mathrm{ctg}^3 x \cdot \dfrac{2}{x}$ г). $x\cdot e^y = x^2 + y - 2$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x\cdot\sin x}$; б). $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x+1)})$; в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5 - 4x^2 + 1}{2x^5 + 3x^3 - x}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$

Вариант 16

1. Найти производную функций:

а). $y = \arcsin^2 5^x + \sqrt{x+2}$ в). $y = tg^3(\sin 2x) + 2^x$

б). $y = \dfrac{\cos 8x}{x^5} - \arccos 3x$ г). $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx - \sin x}{\sin^3 x}$; б). $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{\sin 2x})$; в). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6 - 3x^2 - 2}{2x^6 + 4x + 5}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = 2x + \dfrac{1}{x}$

Вариант 17

1. Найти производную функций:

а). $y = \ln^3(\sin 8x) + ctg\ 2x$ в). $y = \sin 3x \cdot \ln 7x^2$

б). $y = arctg^2 3x$ г). $x \cdot \sin y + y \cdot \sin x = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x - \sin 2x}{x^3}$; б). $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx - \dfrac{1}{x})$; в). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3 - 4x^2 + 1}{6x^3 + 3x + 2}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{1+2x}{(x+1)^2}$

Вариант 18

1. Найти производную функций:

а). $y = 2^{\sin x} + x^2 + 4$ в). $y = \sin^3 7x^2$

б). $y = \dfrac{x^2}{\ln x} + 8x$ г). $x^2 + xy^3 - y^2 - 5 = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos 5x}{x \cdot tg2x}$; б). $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$; в). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5 - x^2 + x}{x^5 - 2}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Вариант 19

1. Найти производную функций:

а). $y = \dfrac{\cos 3x}{4} - \arccos 7x$ в). $y = \arccos^2 7^x + \sqrt{3x+1}$

б). $y = \dfrac{\sin 3x}{x^2} - \arcsin 4x$ г). $\arcsin \dfrac{x}{y} = y \ln x$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - 3x}{2x^3 - x^2}$; б). $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$; в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(e^x+1)}{1 - x\cdot e^x}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x-1}{(2-x)^2}$

Вариант 20

1. Найти производную функций:

а). $y = \ln^2(\cos 2x) + \operatorname{tg} 3x$ в). $y = \cos 3x \cdot \ln 8x$

б). $y = \operatorname{arcctg}^2 8x$ г). $e^x = xy$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$; б). $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1)$; в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{5x^4 + 3x - 2}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$

Вариант 21

1. Найти производную функций:

а). $y = \ln^3 \sqrt{\sin x}$ в). $y = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{3x} + \arcsin x^2$

б). $y = \cos^2 \ln 5x$ г). $e^{x-y} + \sqrt{xy} = 2$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-1)\cdot ctg(x-1)$; б). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(x - \frac{\pi}{2})}{tgx}$; в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5 - x^2 + x}{x^5 - 2}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

Вариант 22

1. Найти производную функций:

а). $y = \sin 3x \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ в). $y = \operatorname{arctg} 5^x - 8x + 5$

б). $y = 2^{x^2 + \sin x}$ г). $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} \cdot \ln^2 x$;   б). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\sin^2 3x}$;   в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3 - 2x + 5}{4 - x^4}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

Вариант 23

1. Найти производную функций:

а). $y = \arccos^2 5x + \ln 3x$ в). $y = \cos^2\left(\ln \dfrac{1}{x}\right)$

б). $y = \operatorname{arctg}(\sin 8x)$ г). $\ln x + e^{\frac{-y}{x}} = \dfrac{x}{e}$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0} tgx \cdot \ln x$;   б). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 2x}$;   в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$

Вариант 24

1. Найти производную функций:

а). $y = \operatorname{ctg} \dfrac{x^2}{4} - \sin x$ в). $y = \ln^2 \sqrt{\cos x}$

б). $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 3x}{7x^2} + \arccos 2x$ г). $\ln(xy) + y^2 = 1$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{10}{x-2} - \dfrac{1}{x^2 - x - 2}\right)$; б). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,tg 2x}{1-\cos x}$; в). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5 - 2x - 3x^4}{x^5 + x + 3}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

Вариант 25

1. Найти производную функций:

а). $y = \cos 2x \cdot \arccos\frac{1}{x}$ в). $y = \mathrm{arctg}\, 7^{x^2} - 3x + 5$

б). $y = \arcsin(\cos 2x)$ г). $x^2 + y^2 + \sin xy = 4$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cdot tgx$; б). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{2x\,tg\,2x}$; в). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-7x+1}{3x^4+x+3}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \frac{x^3}{x-2}$

Вариант 26

1. Найти производную функций:

а). $y = 7^{\sin 3x + 5x}$ в). $y = \mathrm{arcctg}(\cos 5x)$

б). $y = \sqrt{\frac{\cos 2x}{x}} + \ln 8x$ г). $(x+y^2)^2 + x - y = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; б). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos\ 2x}$; в). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \frac{1}{1-x^2}$

Вариант 27

1. Найти производную функций:

а). $y = \arcsin 2x \cdot \mathrm{tg}(7x+3)$ в). $y = \sin^8(\sin 3x)$

б). $y = 3^{x^2 + \mathrm{tg}\, x} - x^3$ г). $x^3y^2 - (2x+y)^2 + 8 = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{2x})$; б). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-7x+1}{3x^4+x+3}$; в). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\,tgx}{1-\cos 4x}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \frac{3x^2-9}{x^2+7}$

Вариант 28

1. Найти производную функций:

а). $y = \cos 3x + \sqrt{x^5 + 3}$ в). $y = \ln^2 \dfrac{1}{x}$

б). $y = \operatorname{arctg} 2^x + x^2 - 7x$ г). $x^2 \cdot \sin y + y^3 \cdot \cos x = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{\arcsin^2 3x}$; б). $\lim\limits_{x \to 0} (ctgx)^{tgx}$; в). $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4 + 5x^2 - 3x^5}{8 - 6x - x^5}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2 + 8x}{2(x-1)}$

Вариант 29

1. Найти производную функций:

а). $y = \dfrac{\sin 2x}{x^4} - x^7 + 2x$ в). $y = \operatorname{arctg}^2 3x$

б). $y = 3^{x^2} \cdot \cos 7x$ г). $x^2 \cdot (x+y)^2 - x + y = 3$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x^3 + x^2 + 4x}$; б). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{\sin^2 2x}$; в). $\lim\limits_{x \to 0} (\ln(1+x))^x$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^2}{4(x-2)}$

Вариант 30

1. Найти производную функций:

а). $y = \sin 2x + \sqrt{x^3 + 7}$ в). $y = \arccos 3x \cdot \operatorname{ctg}(3x + 7)$

б). $y = 2^{x^3 + \operatorname{ctg} x} - x^5$ г). $xy = arctg \dfrac{x}{y}$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$; б). $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2 - 1} \right)$; в). $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 + 3x^2 - x^5}{2x + 3x^2 - 3x^5}$

3. Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{3(2x+1)}{(x+1)^2}$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
Вариант 1

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = x^2 \sin^2 y;\ M_0\left(-1; \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = y \cdot x^y.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \operatorname{arctg}\sqrt{xy}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке M(x_0, y_0, z_0) с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4;\ M_0\ (2; 1,1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$a)\ u = e^{x-2y},\ x = \sin t,\ y = t^3;$

$б)\ z = \dfrac{u^2}{r+4}, u = arcctg\sqrt{x+y}, r = e^{xy}.$

6. Исследовать на экстремум

$z = x^3 + 8y - 6xy + 1.$

Вариант 2

1. Найти частные производные в данной точке:

$$U = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}; \quad M_0\left(0; \frac{1}{2}; 5\right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = y^2 \cdot x^y.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \frac{1}{2\left(x^2 + y^2\right)}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой: $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2; M_0\ (-1; 0; 1).$

5. Найти производную сложной функции:

$$а)\ u = \ln\left(e^x + e^{-y}\right), x = t^2, y = t^3;$$

$$б)\ z = 2u^2 - \sqrt{r}, u = \sin x + y, r = \sqrt{y} + arcctgx.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = y\sqrt{x} - y^2 + 6y - x.$$

Вариант 3

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{1+x^2}; \quad M_0\ (0;\,0).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = x \cdot \sin^2 xy.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = x^2 y^3 e^{-x}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$3x - 2y + z = xz + 5;\ M_0\ (2;\,1;\,-1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a)\ u = y^x,\ x = \ln(t-1),\ y = e^{\frac{t}{2}};$$

$$б)\ \mathrm{z} = 2\mathrm{u}^2 + \sqrt{r},\ u = \sin x + y^2,\ r = y + arctgx.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$$

Вариант 4

1. Найти частные производные в данной точке:

$$U = e^{xyz}\sin\frac{y}{x};\quad M_0\left(2;0;-1\right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z=\sqrt{2xy+y^2}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z=\ln\left(3x+y^{-2}\right).$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z=f\left(x,y\right)$, заданной неявно, в данной точке M(x$_0$, y$_0$, z$_0$) с точностью до двух знаков после запятой:

$$e^z+x+2y+z=4;\ M_0\left(1;1,0\right).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$а)\ u=e^{y-2x+2},\ x=\sin t,\ y=\cos t;$$

$$б)\ \mathrm{z}=\mathrm{u}\sqrt{\mathrm{v}},\ u=\sin^2 x, v=\arcsin x.$$

6. Исследовать на экстремум
$z=1+6x-x^2-xy-y^2.$

Вариант 5

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = \ln\sin(x - 2y);\ M_0\left(0; -\frac{1}{4}\right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = y \cdot \cos^2 xy.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке M(x_0, y_0, z_0) с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0;\ M_0\ (1; 1, -1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$а)\ u = x^2 e^y,\ x = \cos t,\ y = \sin t;$$

$$б)\ z = \ln^2(2u + 3r),\ u = \sin x \cos y,\ r = \cos x \sin y.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

Вариант 6

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = x^2 y; \quad M_0(1,2).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = y \cdot e^{\frac{-x}{y}}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = y^2 \cos x^2 y.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$z^3 + 3xyz + 3y = 7; \ M_0(1; 1; 1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a) \ u = \ln\left(e^x + e^y\right), \ x = t^2, \ y = t^3;$$

$$б) \ \mathrm{z} = \frac{\mathrm{u}^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \ u = \sin x + \cos y, \ v = \sin(xy).$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$$

Вариант 7

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = \ell n \,\mathrm{tg}(x+y); \quad M_0\left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = x \cdot y^x.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \mathrm{arcctg}\,\frac{x}{y}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x,y)$, заданной неявно, в данной точке M(x_0, y_0, z_0) с точностью до двух знаков после запятой:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2};\ M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$а)\ u = x^y,\ x = e^t,\ y = \ln t;$$

$$б)\ z = 3u^2 - r,\ u = \cos y + x,\ r = \sqrt{y} + arctgx - 1.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

Вариант 8

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = \frac{x - y}{x + y}; \quad M_0(1,1).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \sin x^2 \cdot y^3.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = e^{x^2 y}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$e^{z-1} = \cos x \cos y + 1; \quad M_0\left(0; \frac{\pi}{2}; 1\right).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$а)\ u = e^{x+2y},\ x = \sin t,\ y = t^3;$$

$$б)\ z = \frac{2\sqrt{u}}{r^2 + 6},\ u = \arccos(x + y) + \sqrt{x} + y^2,\ r = e^{x+y^2}.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = x^2 - 2y^2 + xy - 3x.$$

Вариант 9

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = \sin y \, \ell n x; \quad M_0(1, \pi).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \frac{x^2 - y^2}{xy}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = y^3 e^x - x e^{-y}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке M(x_0, y_0, z_0) с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0; \; M_0\,(1;\, 2{,}1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a)\; u = x^2 e^{-y},\; x = \sin t,\; y = \sin^2 t;$$

$$б)\; z = \ln^2 \frac{u}{r},\; u = \sin^2 x + y,\; r = arctg\sqrt{x} + 2y.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

Вариант 10

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = y^x; \quad M_0(1, e).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = x^2 \cdot y^x.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \left(x^2 + y^2\right)^3.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке M(x_0, y_0, z_0) с точностью до двух знаков после запятой:

$$xy = z^2 - 1; \; M_0\,(0; 1; -1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a)\; u = \ln\left(e^{-x} + e^y\right),\; x = t^2,\; y = t^3;$$

$$б)\; z = \ln\frac{u}{v},\; u = \sqrt{x^2 - y^2},\; v = y\cos x.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2.$$

Вариант 11

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = x\ell n\,\mathrm{tg}(x+y);\quad M_0\left(0,\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = x^2 y^3 e^{-x}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = x\sin xy + y\cos xy.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x,y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2;\ M_0\ (1;1;1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$а)\ u = e^{y-2x-1}, x = \cos t,\ y = \sin t,$$

$$б)\ z = arctg\frac{u}{v}, u = e^{2x+1+y}, v = e^{2y-1+x}.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$$

Вариант 12

1. Найти частные производные в данной точке:

$$z = 3x^2 + xy - y^3 - 5; \quad M_0(2,1).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \sqrt{2xy + x^2}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \sin(x + \cos y).$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5; \; M_0\,(0;\,2;1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$а)\; u = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right),\; x = \sin t,\; y = \cos t;$$

$$б)\; z = \sqrt[3]{r^3 + u^3 + 3ru},\; r = \sin x \cos y,\; u = \cos x \sin y.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10.$$

Вариант 13

1. Найти частные производные в данной точке:

$$u = t^5 \sin^3 z; \quad M_0\left(1, \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \arcsin\sqrt{xy}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = x^2 \ln(x + y).$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой:

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x = \frac{\pi}{2};\ M_0\left(0; \frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$а)\ u = \arccos\left(\frac{2x}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t;$$

$$б)\ z = 3u^3 + \sqrt{r},\ r = \sin y + x,\ u = \sqrt{x} + arcctgy\,.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = (x-5)^2 + y^2 + 1.$$

Вариант 14

1. Найти частные производные в данной точке:

$$u = \lg\left(x^2 + y^2\right); \quad M_0(2,1).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \cos^2 x^2 y.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \ln\left(3y - x^{-2}\right).$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке M(x_0, y_0, z_0) с точностью до двух знаков после запятой:

$$3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4;\ M_0\ (2;1;2).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$a)\ u = \frac{x^2}{y+1},\ x = 1 - 2t,\ y = arctgt;$$

$$б)\ z = \frac{u^2}{r},\ u = x - 2y,\ r = x + 2y.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Вариант 15

1. Найти частные производные в данной точке:

$$u = xy^2 - \frac{x}{y}; \quad M_0(3,-2).$$

2. Найти полный дифференциал функции:

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^{-2} + y^{-2})^3}.$$

4. Вычислить значения частных производных функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, в данной точке M(x_0, y_0, z_0) с точностью до двух знаков после запятой:

$$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0;\ M_0\,(1;1;1).$$

5. Найти производную сложной функции:

$$а)\ u = \frac{x}{y},\ x = e^t,\ y = 2 - e^{2t};$$

$$б)\ z = \frac{u^2 + r^2}{2},\ u = xy,\ r = \frac{x}{y}.$$

6. Исследовать на экстремум

$$z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$$